생산용량결정-2단계 newsvendor model을 활용하여*

남 익 현**

《目　　次》

Ⅰ. 들어가며

생산활동과 관련하여 가장 중요한 의사결정 영역 중 하나가 생산용량(production capacity)의 결정과 관련된 것이다. 생산용량의 결정은 막대한 투자가 필요한 경우가 많으므로 기업의 경영성과에 커다란 영향을 미친다. 또한 생산용량의 투자는 장기적 영향을 주는 것으로 기업의 성과에 미치는 영향은 오래도록 지속된다고 할 수 있다. 즉, 생산용량의 결정은 장기적 의사결정 영역에 포함되고, 단기간에 생산용량을 증감하는 것은 불가능한 경우가 일반적이다.

다른 의사결정과 마찬가지로 생산용량을 결정함에 있어 우리는 고객의 수요와 대비하여 발생하는 상반된 효과를 고려하여야 한다. 즉, 생산용량이 부족한 경우에는 고객 수요를 충분히 충족시키지 못하므로 직접적으로는 수익손실(lost sales)이 발생하고, 또한 경우에 따라서는 고객의 신뢰상실에 따른 비용(loss of good will)이 발생한다. 이러한 생산용량 부족 비용이 매우 심각한 경우가 당연히 존재하는데, 그 예로 전력산업을 들 수 있다. 전력수요가 생산용량을 초과할 경우 순환정전 혹은 정전(black-out)이 발생하게 된다. 이러한 경우 발생하는 사회적 비용은 실로 엄청나다고 할 수 있을 것이다. 반면에, 생산용량이 고객의 수요를 초과하는 경우에는 또 다른 비용이 발생한다고 할 수 있다. 생산용량을 확보하는 데에는 커다란 투자비용이 발생하므로 초과생산용량을 보유한다는 것은 과다투자에 따른 비용이 발생한다는 것을 의미한다. 따라서 기업에게 있어 이들 비용을 고려하여 최적의 생산용량을 결정하는 것이 매우 중요하게 된다.

---

* 본 연구는 서울대학교 경영정보연구소의 연구비 지원에 의해 이루어졌습니다.

** 서울대학교 경영대학 교수

본 논문에서는 생산용량의 결정과 관련된 문제를 다루고자 한다. 우선 가장 기본적인 모형을 살펴보고, 본론에서는 재고(inventory)를 활용함으로써 생산용량 문제 해결에 기여할 수 있음을 살펴보고자 한다.

Ⅱ. 모 형

우리가 다루고자 하는 모형의 가정에 대해 먼저 설명을 하기로 하자. 우리는 고객의 수요가 2단계에 걸쳐 발생한다고 상정한다. 이러한 고객의 수요는 변동성을 반영하는 확률변수이다. 일정 수준의 생산용량을 확보하고 있는 기업은 1단계 수요가 실제 얼마인지를 파악한 후 매출을 실현시킨다. 그런데 1단계에서 자신의 생산용량의 여유분이 있을 경우 이러한 여유분을 활용하여 추가생산을 하고 이를 재고로 확보한 이후, 고객의 2단계의 수요에 대비할 수 있다. 이러한 재고 확보 가능성이 생산용량의 결정에 어떠한 영향을 미치는지를 본 논문에서 다루고자 한다. 우선 이와 비교를 위해 기본모형을 살펴보기로 하자. 기본모형에서는 고객의 수요가 1단계에 한정하여 발생한다는 것을 전제로 한다. 즉 1단계에서의 추가생산을 통해 2단계 수요 대응이 불가한 상황을 다룬다.

2.1 기본모형

기본모형에서는 고객의 수요가 발생하는 것이 1단계에 한정된다고 가정한다. 우선 분석에 필요한 부호를 설명하기로 하자. 기업이 결정하여야 하는 생산용량을 K로 표시하자. 생산용량 K를 확보하기 위한 투자비를 $C(K)$로 표시하자. 여기에서 주의하여야 하는 것은 $C(K)$은 총투자비가 아니라 이를 기간 당 비용으로 환산한 것이라는 사실이다. 그리고 c_o는 overage cost를 나타내고 c_u는 underage cost를 나타낸다. 고객의 수요를 나타내는 확률변수를 X로 표시하고, X의 확률밀도함수(probability density function)를 f, 누적분포함수(cumulative distribution function)를 F로 표시하자. 그러면 고객의 수요가 X일 경우 발생하는 비용함수는 다음과 같이 표현할 수 있다.

$$G(K,X) = c_o[K-X]^+ + c_u[X-K]^+ + C(K)$$

우리는 이러한 비용함수를 다양하게 표현할 수 있는데, 그 중 하나가 다음과 같다.

$$G(K,X) = (c_o + c_u)[K-X]^+ + c_u(X-K) + C(K)$$

risk-neutral한 기업을 가정할 경우, 기업의 목적함수 값은 $G(K,X)$의 기댓값을 나타내며, 이

는 다음과 같이 표현할 수 있다.

$$g(K) = c_o \int_0^K (K-x) f(x) dx + c_u \int_K^\infty (x-K) f(x) dx + C(K)$$
$$= (c_o + c_u) \int_0^K (K-x) f(x) dx + c_u (E(X) - K) + C(K)$$

목적함수 $g(K)$가 convex function이라는 가정 하에 1차 필요조건은 다음과 같이 표현할 수 있다.

$$(c_o + c_u) F(K) + C'(K) = c_u$$

투자비의 한계비용 $C'(K)$을 고려한다면, 우리는 전통적인 newsvendor model과 유사한 형태의 조건식을 구했음을 알 수 있다.

2.2 2단계 모형

여기서는 보다 구체적으로 목적함수를 표현해 보기로 하자. 기업이 생산용량의 범위 내에서는 고객의 수요만큼 생산하여 개당 p원으로 판매를 한다. 이를 생산하기 위한 변동비는 개당 v라고 한다. 생산용량 부족비용 $c_u = w$라고 표시하자. 고정비는 앞서 언급한 생산용량의 기간 당 비용 C(K)이다. 우선 생산용량의 초과비용과 부족비용을 이들 부호를 활용하여 구체적인 형태로 표현한다면 다음과 같다.

$$G(K,X) = -(p-v)(K \wedge X) + w[X-K]^+ + C(K)$$

여기서 우리는 보관기술의 개발에 의해 초과 생산분을 창고에 보관하면 다음 단계의 수요를 위해 판매가 가능한 경우를 살펴보자. 그리고 수요가 2단계로 발생하는 경우, 해당 기업이 다음과 같은 생산운영전략을 구사한다고 상정하자. 1단계에서의 수요 X가 실현이 되면 생산용량 K 범위 내에서 고객의 수요를 충족시킨다. 그리고 생산용량의 여유분이 있을 경우 이를 활용하여 추가로 생산을 하고, 이를 재고로 보유하게 된다. 이렇게 확보한 재고와 다음 2단계에서의 생산용량 K를 합한 것을 활용하여 2단계에서의 수요에 대응하게 된다. 보다 구체적으로 살펴보면, 2단계의 수요를 관찰한 후 1단계에서 넘어온 재고로 충족이 가능하다면 추가 생산 없이 판매를 완수한다. 만약 2단계에서의 수요가 보유 재고를 초과하면 추가로 생산하여 수요를 충족시킨다. 물론 2단계에서의 추가 생산가능량은 생산용량 K로 제한이 된다. 여기서 우리는 1단계에서 생산되어 재고로 확보된

것들은 재고유지비용 h가 발생하고, 2단계 이후에는 상품의 가치가 없어진다고 가정한다. 즉, 재고의 수명은 한 기간에 머문다고 가정한다. 추가적으로 분석의 편의상 $p > v + h$을 가정한다. 이는 판매단가가 변동비와 재고유지비의 합보다 크다는 것으로, 이 부등식은 성립되는 것이 일반적이라고 볼 수 있다. 여기서 1단계 수요를 나타내는 확률변수 X에 추가하여, 2단계 수요를 나타내는 확률변수를 Y로 표시하기로 하자. 그리고 1단계와 2단계의 수요에 대한 확률밀도함수는 $m(x,y)$로 표시하기로 하자. 우리의 관심사는 1단계에서 재고를 도입하는 대안이 기존의 시스템에 비해 목적함수 값을 개선하는지에 있다.

1단계에서의 수요가 X라고 한다면, 1단계의 생산용량 K를 활용하여 1단계 수요 X를 충족시키고 남는 재고는 $(K-X)^+$가 된다. 따라서 우리는 목적함수 값을 구하는데 있어 2단계 수요를 다음과 같이 3개의 구간으로 구분하는 것이 필요하다. 즉,

$$0 \leqq Y \leqq (K-X)^+, (K-X)^+ \leqq Y \leqq (K-X)^+ + K, (K-X)^+ + K \leqq Y$$

이를 보다 구체적으로 구분을 해보면 $X \leqq K$의 경우에 있어, 우리는 목적함수 값을 다음과 같이 4개의 영역으로 나누어 표현할 수 있다. 그리고 다섯 번째 영역인 $X > K$의 경우에는 재고 시스템을 도입할 의미가 없어진다. 왜냐하면 $X > K$의 경우에는 1단계에서 초과수요가 발생하기 때문에 재고를 확보할 수가 없기 때문이다. $G(K,X,Y)$는 재고를 활용하지 않는 경우 1단계 수요가 X, 2단계 수요가 Y일 때의 이익함수를 나타낸다. $I(K,X,Y)$는 재고를 활용하는 경우 1단계 수요가 X, 2단계 수요가 Y일 때의 이익함수를 나타낸다. 두 식 모두 생산용량에 대한 투자비는 동일하므로 생략하기로 하자. 우리는 각 영역에서 이들 이익함수의 차이를 분석하여 재고활용정책의 효과를 분석하고자 한다.

(1) $0 \leqq Y \leqq K-X$

$$G(K,X,Y) = (p-v)(X+Y),$$

$$I(K,X,Y) = pX - vK - h(K-X) + pY,$$

$$G - I = v[K - (X+Y)] + h(K-X) > 0.$$

이 영역에서는 $K \geqq X+Y, K \geqq X$이므로 재고를 활용하는 것이 불리함을 알 수 있다. 보다 구체적으로 설명을 해보면, 이 영역은 1단계 수요와 2단계 수요 모두 매우 적어 두 수요의 합이 한 기간의 생산용량 K에 미치지 못하는 경우를 말한다. 이 경우 재고를 활용한다면, 1단계에서 여유생산량은 $K-X$가 된다. 그런데 2단계에서의 수요가 이 재고량보다도 작은 경우에 해당하므로 두

종류의 비용이 과다 발생하는 상황이 된다. 하나는 불필요하게 과다생산을 하여 발생한 변동비용인 $v[K-(X+Y)]$가 되고, 다른 하나는 1단계에서 생산하여 보유한 재고에 대한 재고유지비용인 $h(K-X)$가 된다. 따라서 이 영역의 수요에 대해서는 재고활용정책이 불리하게 작용한다.

(2) $K \geqq Y \geqq K-X \geqq 0$

$G(K,X,Y)=(p-v)(X+Y)$,

$I(K,X,Y)=(p-v)(X+Y)-h(K-X)$,

$G-I=h(K-X)>0$.

이 경우는 2단계 수요가 작지만 1단계에서 넘어온 재고량은 초과하는 경우를 말한다. 이 영역에서는 1단계 재고량에 대한 재고유지비에 해당하는 만큼 재고활용정책이 불리하게 됨을 알 수 있다.

(3) $K \leqq Y \leqq 2K-X$

$G(K,X,Y)=(p-v)(X+K)-w(Y-K)$,

$I(K,X,Y)=pX-vK-h(K-X)+pY-v(X+Y-K)=p(X+Y)+(h-v)X-vY-hK$,

$G-I=h(K-X)-(Y-K)(p-v+w)$.

이 경우는 2단계 수요 Y가 기간 생산용량 K를 초과하지만 2기의 생산가용량인 2K-X 보다는 작은 경우를 말한다. 이 영역에서는 1단계 재고량을 초과하는 2단계 수요가 발생을 하며, 2단계 수요는 해당 기간의 생산용량 K를 초과하는 경우를 말한다. 따라서 재고활용정책이 없는 경우에는 2단계에서 재고부족이 발생하고 이에 따른 재고부족비용이 발생하게 된다. 그러므로 재고를 활용하지 않는 경우와 재고를 활용하는 경우에 따른 이익함수의 차이는 두 가지로 구성이 됨을 알 수 있다. 하나는 1단계 재고량에 대한 재고유지비에 해당하는 것으로, $h(K-X)$만큼 재고활용정책이 불리하게 됨을 알 수 있다. 반면에, 재고활용정책의 경우 1단계에서의 재고를 활용하여 2단계에서 발생하였을 재고부족비용의 감소혜택을 볼 수 있다. 이러한 효과가 $(Y-K)(p-v+w)$으로 나타난다. 만약 재고부족비용 w가 매우 큰 경우, 혹은 재고유지비용 h가 매우 작은 경우에는 $G-I=h(K-X)-(Y-K)(p-v+w)<0$이 성립한다. 이는 재고활용정책이 보다 유리함을 의미하는 것이다.

(4) $Y \geqq 2K-X, X \leqq K$

$G(K,X,Y)=(p-v)(X+K)-w(Y-K)$,

$$I(K,X,Y)=pX-vK-h(K-X)+p(2K-X)-vK-w(X+Y-2K),$$
$$G-I=-(K-X)[w+(p-v-h)]<0.$$

이 경우는 2단계 수요 Y가 매우 커서 기간 생산용량 K를 초과하고, 또한 두 기간의 총수요 X+Y가 총생산용량인 2K보다도 큰 경우를 말한다. 이 영역에서는 1단계 재고량은 물론 2단계의 생산가능량 K까지 초과하는 2단계 수요가 발생을 하는 경우이다. 이 경우 1단계에서 확보한 재고 보유량이 재고부족비용을 절감하는데 큰 기여를 하게 된다. 재고를 활용하게 되면 앞서 설명한 것처럼 추가적인 비용이 재고유지비인데, 이것이 $h(K-X)$임을 알 수 있다. 하지만 이 영역에서는 이러한 추가 재고유지비를 포함하여도 재고활용정책의 경우 비용절감효과가 나타남을 알 수 있다. 즉, $G-I=-(K-X)[w+(p-v-h)]$에서 $w>0$과 $p>v+h$에 의해 $G-I$가 음수임을 알 수 있다. 즉, 이 영역의 수요에서는 재고를 활용하는 정책이 그렇지 않은 경우에 비해 분명히 유리하다는 것이다.

(5) $X>K$

$$G-I=0.$$

앞서 각 영역별로 도출한 이익함수 G,I는 확률변수 X,Y의 함수임을 알 수 있다. 따라서 재고활용정책의 효과를 검토하기 위해서는 이들의 기댓값인 $E_{X,Y}[G-I]$를 구해야 한다. 이는 확률밀도함수 $m(x,y)$를 이용하여 이중적분식(double integral function)으로 표현할 수 있다.

앞서 설명한 것을 요약해 보면 영역 1과 2에서는 재고활용정책이 불리하다. 반면에 영역 4에서는 재고활용정책이 유리하다. 그리고 영역 3에서는 모형의 상수 값들에 의해 유불리가 달라질 수 있다. 영역 3에서 h=0일 경우, 즉 재고유지비용이 없는 경우 재고활용정책이 유리해진다. $E_{X,Y}[G-I]<0$은 재고활용정책이 유리하다는 것을 의미하는 바, 따라서 이 조건의 성립 여부는 $m(x,y)$에 의해 결정된다는 것을 알 수 있다. 우리는 영역 3과 4, 특히 영역 4의 확률이 높을 경우 재고활용정책의 효과가 커진다는 것을 알 수 있다. 영역 3과 4는 1단계에서의 수요가 작고 2단계의 수요가 클 경우를 말한다. 따라서 1단계에서의 수요 X가 작을 경우 다음 단계의 수요 Y가 증가하는 확률이 큰 경우와 같은 상관관계가 성립할 때 재고활용정책이 효과적이라고 할 수 있다. 이러한 수요 패턴은 1단계에서 수요가 작을 경우 다음 단계에서 보상적 수요가 발생하는 경우가 그 예가 될 수 있다.

Ⅲ. 최적 생산용량

3.1 상이한 생산용량

앞서 우리는 생산용량의 여유분을 활용하여 재고를 확보하는 경우와 재고유지가 불가능한 경우를 비교하였다. 그런데 여기서 우리가 주의하여야 하는 점에 대해 설명하고자 한다. 우리가 앞에서 다룬 재고활용정책의 효과, 즉 $E_{X,Y}[G-I]$은 동일한 생산용량 K를 전제로 분석이 이루어진 것이다. 동일한 생산용량을 전제로 하였기에 생산용량 확보에 따른 고정비 C(K)가 두 경우 모두 동일하게 되고, 따라서 이를 제거하고 기대이익의 차이를 분석한 것이다. 그런데 중요한 점은 재고활용정책의 활용 가능 여부에 따라 최적 생산용량 자체가 상이할 수 있다는 점을 고려해야 한다는 것이다. 이 경우 재고활용정책의 효과는 이전의 분석에서와 비교하여 더욱 클 것이다. 보다 구체적으로 보면, 생산용량을 의사결정변수로 도입할 경우 다음의 식이 재고활용정책의 효과는 나타내는 것이다. 그리고 이는 앞서 고려한 재고활용정책 효과보다 더 클 것은 자명하다.

$$Max_K\{E_{X,Y}[G(K,X,Y)-2C(K)]\}-Max_K\{E_{X,Y}[I(K,X,Y)-2C(K)]\}.$$

$E_{X,Y}[G(K,X,Y)-2C(K)]$은 재고활용정책이 없는 기존의 경우에 발생하는 2기동안의 이익의 기댓값을 나타내는 것이다. 따라서 $Max_K\{E_{X,Y}[G(K,X,Y)-2C(K)]\}$은 기존 경우에 있어 최적의 생산용량($K_1^*$)을 확보할 경우의 2기 이익기댓값의 최적치가 된다. 반면에 $E_{X,Y}[I(K,X,Y)-2C(K)]$은 1단계 재고를 활용하는 경우에 발생하는 2기동안의 이익의 기댓값을 나타내는 것이다. 따라서 $Max_K\{E_{X,Y}[I(K,X,Y)-2C(K)]\}$은 재고활용의 경우에 있어 최적의 생산용량($K_2^*$)을 확보할 경우의 2기 이익기댓값의 최적치가 된다.

일반적으로 재고활용정책을 이용할 때의 최적생산용량 K_2^*이 기존 시스템에서의 최적생산용량 K_1^*와 동일하지 않을 것이다. 생산용량이 상이하다는 전제하에서는 보다 의사결정의 유연성이 커지는 것이다. 재고활용정책을 활용하는 경우에서의 최적 생산용량이 재고를 활용하지 않는 경우에 비해 작을 개연성이 높다. 이러한 개연성은 생산용량 비용함수인 C(K)가 볼록증가(convex increasing)일 경우 더욱 높아질 것이다. 직관적으로 보면, 비싼 생산용량을 확보하는 것 보다 생산용량의 여유분을 재고로 활용하여 수요 폭주에 대비하는 것이 보다 효과적일 수 있다는 것이다. 따라서 재고활용정책의 효과는 앞 절에서의 분석보다 더욱 클 것이라는 결론을 내릴 수 있다.

3.2 재고확보 운영정책

재고활용정책을 적용할 경우 기존 시스템에서의 최적생산용량과의 차이가 발생할 것이며, 이 경우 재고활용정책의 효과는 증가한다는 내용을 앞서 살펴보았다. 그런데 재고확보정책의 효과를 증가시킬 수 있는 방안으로 우리가 하나 더 고려해 볼 수 있는 것이 있다. 우리가 재고확보정책으로 활용한 것은 1단계에서 수요가 생산용량에 미치지 못한 경우 여유생산용량 K-X만큼의 재고를 확보하여 2단계 수요에 대비하는 것이었다. 이 정책의 효과를 분석할 때 1단계와 2단계 수요 모두가 작을 경우, 즉 X 〈 K, Y 〈 K의 경우에는 재고유지비용 혹은 과대 생산에 따른 비용으로 인해 기존 시스템보다 불리하게 됨을 알 수 있었다.

따라서 재고확보정책을 보다 유연하게 활용할 수 있다면 그 효과를 더욱 증가시킬 수 있다. 즉 1단계에서의 재고확보량을 $[K-X]^{+}$로 단순화한 것이 기존 분석의 전제인데, 이를 재고확보량은 가용 생산용량의 여유분 이하라는 조건을 만족하는 X의 함수로 확장한다면 최적목적함수값은 더욱 개선될 것이다. 즉 1단계 수요가 X일 경우의 재고확보량 함수를 $S(X) \geq 0$로 표시하고, $S(X) \leq [K-X]^{+}$을 만족시키는 조건하에 이익함수 기댓값을 최대화하는 K와 함수 $S^{*}(X)$를 구하면 보다 증가된 이익함수 기댓값을 구할 수 있다.

Ⅳ. 결론 및 의미

본 논문에서 우리는 2단계 수요가 발생하는 경우 재고를 활용하는 정책의 효과를 살펴보았다. 재고활용정책이 효과가 낼 수 있다는 근거는 수요가 생산용량보다 적은 경우 여유 생산용량을 놀리지 않고 활용하여 재고를 확보한다는데 있다. 이렇게 확보한 재고를 활용하여 다음 기에 수요증가로 인해 발생 가능한 초과수요에 대응하여 재고부족비용을 절감하는데 있다. 그런데 이러한 효과는 1단계 수요와 2단계 수요의 확률밀도함수에 의해 영향을 받는다는 것을 살펴보았다. 그리고 이러한 효과를 더욱 크게 하는 것으로 각 경우에 최적생산용량 값 자체가 상이할 수 있다는 사실, 재고확보정책을 보다 유연하게 할 수 있다는 사실을 통해 설명하였다. 이러한 연구의 주된 의미는 생산용량과 재고가 별개의 문제가 아니라 서로 연관이 될 수 있다는 사실에 있다. 즉 재고를 활용할 수 있다면 이는 생산용량의 대체재로서의 효과를 줄 수 있다는 것이다.

그러면 현실적인 사례를 통해 그 의미를 살펴보기로 하자. 전력산업의 경우 수요에 대비하여 발전에 필요한 생산용량을 확보하여야 한다. 이는 위해 수요에 대한 예측과 함께 예비전력을 확보하는 것이다. 그런데 전기생산용량을 확보하기 위한 투자비는 매우 크다고 할 수 있다. 또한 전기의

경우 재고부족비용은 실로 엄청나다고 할 수 있다. 초과수요가 발생하면 순차적 정전, 나아가 더 심한 경우 정전(black-out)이 발생하게 되며, 우리 모형에서 w에 해당하는 이에 따른 비용은 매우 크다고 할 수 있다. 재고부족비용이 막대한 이와 같은 경우 수요의 피크(peak demand)에 맞추어 생산용량을 확보하게 되며, 이 경우 생산용량의 과다한 투자를 피할 수 없게 된다. 따라서 만약 재고가 가능하다면 고비용의 생산용량의 확보를 대체하여 급작스러운 수요증가에 대응할 수 있을 것이며, 이는 매우 효과적인 대응이 될 것이다.

구체적으로 보면 ESS(Energy Storage System)가 가능할 경우에 대해 살펴보자. ESS는 전기를 산업용 배터리에 충전하여 추후 전기수요에 활용하는 시스템이다. 이는 전기생산용량의 여유가 있을 때 전기를 생산하여 충전해 두었다가 추후 전기수요에 대한 충족이 필요할 때 이용하는 것이다. 가령 낮에 태양광을 활용하여 전기를 생산한 후 이를 충전하여 야간 전기수요에 사용하는 것도 좋은 예가 될 것이다. 이러한 내용은 우리가 다룬 재고활용모형과 일치한다고 볼 수 있다. 또한 충전한 전기가 상당기간 수명을 유지한다고 볼 때, 이는 재고유지비용 h가 낮은 것에 해당한다고 볼 수 있다. 이러한 ESS가 활용 가능한 경우 전기 생산을 위한 필요 생산용량을 기존의 경우보다 낮게 설정하여도 동일한 전기공급효과를 기대할 수 있게 된다. 즉 생산용량의 여유를 버리지 않고 ESS에 재고로 확보함으로써 추가 생산용량을 갖고 있는 효과를 누릴 수 있는 것이다.

참 고 문 헌

1. Lee J. Krajewski, Manoi K. Malhotra, and Larry P. Ritzman, Operations Management, 11th edition, Pearson Education Limited, 2016.
2. Yan Qin, Ruoxuan Wang, Asoo J. Vakharia, Yuwen Chen, Michelle M. H. Seref, The newsvendor problem: Review and directions for future research, European J. of Operations Research, Vol. 213, Issue 2, Sept. 2011, pp 361-374.